

數學是發明還是發現？

在各領域都如此有用的數學，是人類發明的工具？還是人類發現的寶藏？

撰文／利維歐（Mario Livio） 翻譯／翁秉仁

重點提要

- 最深刻的謎團往往存在於我們最習以為常的事物。大多數人從不曾細思科學家為何用數學來描述並解釋世界，但究竟為何如此？
- 數學概念的發展雖然純粹是基於抽象的理由，卻能解釋真實現象。正如物理學家魏格納所言，如此好用的數學「是我們既不能理解也不配擁有的美好禮物。」
- 謎團之一是：數學是發明（人類心智的創造）還是發現（獨立於我們的存在物）？作者認為兩者皆是。

大多數人認為數學有用是理所當然，像是科學家以數學公式來描述次原子事件、工程師用數學計算太空船的路徑。我們接受最先由伽利略倡議的觀點：數學是科學的語言，其文法可以解釋實驗結果，甚至預測奇特的現象。數學驚人的威力處處可見，譬如蘇格蘭物理學家馬克士威（James Clark Maxwell）的著名方程組，他的四個算式不只總結了 1860 年代所有已知的電磁現象，並且預示了無線電波的存在，比德國物理學家赫茲（Heinrich Hertz）偵測到它還早了 20 年。極少語言這麼有效率，能將具有價值的眾多材料，如此簡潔、精確又清楚地表達出來。愛因斯坦曾反思說：「數學做為人類思想的產物，獨立於經驗之外，怎麼可能和現實世界配合得如此天衣無縫？」

身為一位理論天文物理學家，我在每一個工作環節都會遇到「數學不合理的有效性」（unreasonable effectiveness of mathematics），這是 1960 年諾貝爾物理獎得主魏格納（Eugene Wigner）的用語。不論我是在研究哪些前身恆星系統會爆炸成 Ia 型超新星，或者計算太陽最終變成紅巨星時地球的命運，我所使用的工具或發展的模型都是數學。數學掌握自然世界的不可思議特質，讓我始終著迷。在 10 年前，我對這個課題有了更深刻的想法。

數學家、物理學家、哲學家、認知科學家，早已為這個謎團的核心議題，爭論了數百年。數學到底是如愛因斯坦所相信的，是一組發明出來的工具？還是數學確實存在於某個抽象的場域，而我們只是發現其中的真理？許多著名數學家，包括希爾伯特（David Hilbert）、康托（Georg Cantor），還有暱稱為布爾巴基（Bourbaki）的一群數學家，他們相信愛因斯坦的看法，相關的思想學派稱為形式主義（Formalism）。但是另一群傑出的思想家，包括哈迪（Godfrey Harold Hardy）、彭若斯（Roger Penrose）、哥德爾（Kurt Gdel）則持對立的看法，這個思想學派稱為柏拉圖主義（Platonism）。

這項數學本質的爭論延續至今，似乎仍然很難解答。不過我相信，這是因為我們過度簡單的二分法提問「數學是發現還是發明？」，反而忽略了比較複雜的可能性：

發明和發現都扮演了重要的角色。我認爲兩者合起來才能解釋數學爲什麼這麼有用。雖然消除發明與發現的對立性，並不能全然解釋數學不合理的有效性，但針對這個影響深遠的問題，即使是不完整的一小步，仍算有所進展。

既是發明也是發現

數學不合理的有效性有兩層很不一樣的意義，一者積極，一者消極。有時科學家爲了將現實世界的現象量化，會發明特殊的方法。例如牛頓發明微積分是爲了掌握運動與變化，於是將其切割成一連串無窮小的片段。因爲這畢竟是量身打造的工具，所以這類積極發明當然有效。令人訝異的是在某些情況下，這些理論展現驚人的精確度。以量子電動力學爲例，這是描述光和物質作用的數學理論。科學家計算電子的磁矩時發現，理論的計算值和 2008 年得到的最新實驗值 1.00115965218073（以適當單位測量）符合，準確度竟高達兆分位。

也許更令人驚奇的是，有時數學家在發展一整套的研究時，心裡並沒有任何預設的應用。結果經過幾十年甚至幾百年後，物理學家才發現這個數學分支的研究，竟然和他們的觀察頗有相合之處。這種消極有效性的例子不勝枚舉，例如法國數學家迦羅瓦（variste Galois）在 19 世紀初發展了群論，唯一目的是要判斷多項式的可解性。群的涵義很廣泛，它是由一些物件集合（例如整數）所構成的代數結構，並以某種運算（例如加法）來結合，而且該運算必須遵守特定規則。（其中包括單位元素如 0 的存在性，0 加任何數的結果還是該數。）結果到了 20 世紀，這門非常抽象的數學，竟成爲刻畫物質基礎，也就是基本粒子最豐饒的理論。1960 年代，葛爾曼（Murray Gell-Mann）與尼曼（Yuval Ne'eman）不約而同提出，有一類特殊群 SU(3)反映了次原子粒子「強子」（hadron）的行爲，這項關聯性最終爲原子核如何結合的現代理論奠定了基礎。

結論（knot theory）爲數學的消極有效性提供了另一個優美的範例。數學中的結和日常生活中的結類似，只是沒有鬆開的兩端。在 1860 年代，克爾文爵士（Lord Kelvin）想將原子描述成結狀的以太（ether），這個錯誤的模型因爲無法解釋真實現象而失敗，此後數學家繼續研究結論幾十年，只是將它當做純數學的秘密武器。神奇的是，現在結論提供了弦論與環圈量子重力論的重要見解，這兩個領域是當今嘗試結合量子力學與廣義相對論，以建構出時空本質的最佳理論。

類似的，英國數學家哈迪在數論中的發現，促進了密碼學的發展，儘管哈迪曾經宣稱：「還沒有人發現數論的成果有任何類似戰爭上的用途。」另外在 1854 年，黎曼（Bernhard Riemann）描述了現在稱爲黎曼幾何的非歐幾何，這是平行線可能會彼此相交或越離越遠的奇特空間。大半個世紀之後，愛因斯坦運用這種幾何學建立了廣義相對論。

於是一種模式浮現了：人們從周遭的世界萃取出某些元素，發明了數學概念，例如數、直線、形體、集合、群等，其中有些具有特殊目的，有些則只是純粹好玩。

然後他們再繼續去發現這些數學概念之間的關係。由於整個發明與發現的過程是人

為的（這和柏拉圖主義者所相信的發現不同），因此數學的終極根基是人類的感知與人們能夠喚起的心智圖像。例如人類天生就具有直接數感（subitizing），可以直接認知小的數量，這無疑導致了數的概念。另外，人類對個別物體的邊緣十分敏感，也很善於分辨直線與曲線，或是不同的圖形（例如圓與橢圓），這些能力可能導致算術與幾何的發展。還有人類不斷重複的因果經驗，至少為邏輯的發明做出部份貢獻，讓我們能從真確的敘述，推導出其他正確的敘述。

【欲閱讀完整的豐富內容，請參閱科學人 2011 年第 115 期 9 月號】